

率にもとづいて行った。肝細胞がんの術後残肝再発例について肝動脈塞栓療法、エタノール局所注入療法の治療効果は報告されていないので、初回治療の結果からエタノール局所注入療法群の3年生存率を70%、肝動脈塞栓療法群の3年生存率を40-50%と見積もった。設定条件を何種類かに動かして必要なサンプルサイズを計算した結果、両群合計120例以上が2年間の研究期間を考えると現実的であると判断した。

無作為化の方法としては、代表的なものとして、単純ランダム化、パーミューテッド・ブロック、いかさまコイン、などがある。「再発肝がんに対する治療法の選択」試験では、目標症例数が120例と比較的小さい試験であること、各施設ごとのエタノール局所注入療法群、肝動脈塞栓療法群の症例数もそろえたいこと、などからパーミューテッド・ブロックによる無作為化を行うことにした。

「再発肝がんに対する治療法の選択」試験では、対象患者が選択基準を満たしているかどうかを最終的に血管造影で判定する。その際、もし患者が選択基準を満たし、かつ肝動脈塞栓療法を割り付けられた場合、血管造影直後に治療を開始する必要がある。そのため、患者登録を迅速に行う必要があり、血管造影前の仮登録（電話またはFAX）と血管造影中の電話による本登録を実施することにした。筆者はこの患者登録のための登録プログラムを開発、作成し、現在患者の登録に用いている。

## 生存競争系と非線形積分可能な力学系の確率モデル

伊藤 栄 明

いま、 $\{1, 2, \dots, 2s+1\}$  の  $2s+1$  種からなる総粒子数  $n$  個の系を考える。離散的な時点を考え、各時点において1度だけランダムな2体衝突が起こるものと仮定する。 $2s+1$  種の間の強弱関係は次に述べるとする。衝突に際し弱い種の粒子は強い種の粒子に変化する。総粒子数  $n$  は  $t$  によらないが、各々の種の粒子数は  $t$  とともに変化していく。2種間の強弱関係を oriented arc に対応させれば、各種間の強弱関係は1つの有向グラフ、トーナメントによって示される。トーナメント  $[T_r]$  は  $2r+1$  個の node  $\{1, 2, \dots, 2r+1\}$  からなり、 $i-j \equiv 1, 2, \dots, r \pmod{2r+1}$  のとき  $i$  は  $j$  より強いものとする。従って  $[T_r]$  の各々の node は  $r$  個の他の node より強く、残りの  $r$  個の node より弱いということになる。いま、時刻  $t$  における種  $j$  の粒子数  $N_j(t)$  を並べ、ランダムベクトル  $N(t) \equiv (N_1(t), N_2(t), \dots, N_{2s+1}(t))$  をつくる。 $P_i(t) = N_i(t)/n$ ,  $i=1, 2, \dots, 2s+1$  とおく。 $P(t) = \beta$  なる状態にあるシステムから  $2r+1$  個の粒子をとりだしたとき、それらの強弱関係を表すトーナメントが  $[T_r]$  に同型である確率を  $I_r(\beta)$  と書く。 $\theta_r = 1 - 2_{2r+1}C_2/n(n-1)$  とし、 $F_t$  を  $\{P(u), u=0, 1, 2, \dots, t\}$  より生成される  $\sigma$ -代数とすれば  $\{\theta_r^t H_r(P(t)), F_t, t=1, 2, \dots\}$ ,  $r=0, 1, 2, \dots, s$  はマルチンゲールとなる。

この確率モデルは次の確率微分方程式系により近似されると考えられる。

$$\frac{d}{dt} P_i = c_1 P_i \left( \sum_{j=1}^s P_{i-j} - \sum_{j=1}^s P_{i+j} \right) + \sum_{j=1}^{2s+1} \sqrt{c_2 P_i P_j} db_{ij}(t), \quad i=1, 2, \dots, 2s+1.$$

ここで  $b_{ij}(t)$  ( $i > j$ ) はたがいに独立な標準 Brown 運動とし、 $b_{ij}(t) + b_{ji}(t) = 0$  が成り立つものとする。この系について、上記と同様のマルチンゲールがえられる。 $c_2 = 0$  の場合はこれらのマルチンゲールは保存量に対応し、 $s=2$  の場合

$$\begin{aligned} I_0 &= P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5, \\ I_1 &= P_1 P_2 P_4 + P_2 P_3 P_5 + P_3 P_4 P_1 + P_4 P_5 P_2 + P_5 P_1 P_3, \\ I_2 &= P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 \end{aligned}$$

がえられる。

$A_t$  を任意の連続、結合的代数とする。 $H: A_t \rightarrow A_t$  を  $A_t$  の自己準同型とする。すなわち  $H(k_1 a + k_2 b) = k_1 H(a) + k_2 H(b)$ ,  $H(ab) = H(a)H(b)$  が  $a, b \in A_t$ ,  $k_1, k_2 \in \mathbf{R}$  または  $\mathbf{C}$  について成り立つも

のとする.

いま,  $G, H$  はたがい可換な  $A_t$  上の自己準同型とする.  $L, A$  を次のようにさだめる.

$$\begin{aligned} L(t, \lambda) &= a_1(t)G + \lambda H, \\ A(t, \lambda) &= b(t) + \lambda HG^{-1}. \end{aligned}$$

ここで  $a_1, b$  は  $A_t$  の元とし,  $\lambda$  は任意の変数とする.  $\lambda$  のべき乗の係数を比較することにより Lax 形式

$$\frac{d}{dt} L = LA - AL$$

は次の方程式系と同値である.

$$\begin{aligned} \lambda^2: H^2 G^{-1} - HG^{-1}H &= 0, \\ \lambda^1: H(b)H - bH + a_1 GHG^{-1} - HG^{-1}(a_1)H &= 0, \\ \lambda^0: \frac{d}{dt} a_1 &= a_1 G(b) - ba_1. \end{aligned}$$

特別な場合として  $p$  を整数として

$$G = H^{1-p},$$

なる場合を考える. 整数を定義域とし  $\mathbf{R}$  を値としてとる関数からなる代数を  $A_t = F(\mathbf{Z}, \mathbf{R})$  とすると,

$$\frac{d}{dt} a_i = a_i \left( \sum_{k=1}^{p-1} a_{i+k} - \sum_{k=1}^{p-1} a_{i-k} \right)$$

がえられる (Bogoyavlensky (1990)). これより保存量

$$J_k = \sum_{i=1}^n \sum_{S_1, S_2, \dots, S_{k-1}} C(S) \prod_{\ell=0}^{k-1} a_{i-\ell r + S_1 + \dots + S_\ell}$$

がえられる. ここで

$$\begin{aligned} S_i &\geq 0, \quad S_0 = 0, \quad S_1 + S_2 + \dots + S_{k-1} \leq kr, \\ r &= p-1, \\ C(S) &= kr - S_1 - \dots - S_{k-1} + 1 \end{aligned}$$

(Bogoyavlensky (1988)). これより上記の  $s=2$  の場合

$$\begin{aligned} J_1 &= I_0, \quad J_2 = 2I_0^2, \quad J_3 = 3I_0^3 + 9I_1, \\ J_4 &= 3I_0^4 + 24I_0I_1, \quad J_5 = 3I_0^5 + 45I_1I_0^2 + 15I_2 \end{aligned}$$

となる. これらの量は上記の確率モデルにおいてはマルチンゲールとならない.

剛体回転についての Euler 方程式は, 整数を定義域とし行列を値としてとる関数からなるまた別の代数を考えることによりえられる.

$a_1, b, c_1, d_1$  を  $A_t$  の元として

$$L = a_1 G + \lambda c_1 H + \lambda^2 d_1 H^2 G^{-1}, \quad A = b + \lambda HG^{-1}$$

を考える.  $\lambda$  のべき乗の係数を比較することにより Lax 形式は

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1 G(b) - ba_1, \quad c_1 = c_1 H(b) - bc_1 + a_1 - HG^{-1}(a_1), \\ d_1 &= 0 = d_1 H^2 G^{-1}(b) - bd_1 - HG^{-1}(c_1) + c_1, \quad 0 = d_1 - HG^{-1}(d_1) \end{aligned}$$

なる方程式系と同値である.

$c_1 = b, d_1$  を単位元,  $H$  を恒等作用素とすると

$$b = a_1 - G^{-1}(a_1), \quad a_1 = a_1 G(b) - ba_1$$

となる。

$A_i = F(\mathbf{Z}, \mathbf{R})$  を整数を定義域とする関数からなる可換代数とし自己準同型  $G$  をシフト  $(Gf)(k) = f(k+1)$  とすると

$$b(k) = a_1(k) - a_1(k-1), \quad a_1(k) = a_k(b(k+1) - b(k))$$

となり、これより戸田格子がえられる (Bogoyavlensky (1990)). 我々の確率モデルは非線形積分可能な力学系と自然につながっているが、戸田格子, Euler 方程式についての自然な確率モデルがあるかどうか興味ある問題とおもわれる。

## 参 考 文 献

- Bogoyavlensky, O.I. (1988). Integrable discretizations of the Kdv equation, *Phys. Lett. A*, **134**, 34-38.  
 Bogoyavlensky, O.I. (1990). A theorem on two commuting automorphisms, and integrable differential equations, *Math. USSR Izv.*, **36**, 263-279.  
 Itoh, Y. (1973). On a ruin problem with interaction, *Ann. Inst. Statist. Math.*, **25**, 635-641.  
 伊藤栄明 (1977). 種競合のモデルとその性質, *Seminar on Probability*, **44**, 141-146.  
 Itoh, Y. (1979). Random collision models in oriented graphs, *J. Appl. Probab.*, **16**, 36-44.  
 Itoh, Y. (1987). Integrals of a Lotka-Volterra system of odd number of variables, *Progr. Theoret. Phys.*, **78**, 507-510.

## 逆2項分布の拡張と improper な分布

柳 本 武 美

### 1. 序

確率過程において初期通過時間の概念はポピュラーであり、イメージが明確な割には統計モデルとしての利用はスパーズである。逆2項分布とその拡張した分布が人間の社会で現れる極めて変動の大きい事象を解析するために有用と考えられる。

### 2. 初期通過時間モデル

初期状態を  $k$  (自然数) とし推移確率を  $p_{ij}$  とするマルコフ過程を考える。更に  $p_{ij} = p_{j-i}$  で  $p_i$  は  $i < -1$  のとき 0 であるとして、吸収壁は 0 であるとする。特に  $0 < p < 1$  として、 $p_{-1} = p$ ,  $p_0 = 1 - p$  と置くと、初期通過時間を表す確率変数  $Z$  に対し  $X = Z - k$  は負の2項分布になる。Yanagimoto (1989) は  $p_{-1} = p$ ,  $p_1 = 1 - p$  と置くと、 $X = (Z - k)/2$  が負の2項分布と呼ぶべき分布になることを示した。清水・柳本 (1991) は  $p_{-1}$ ,  $p_0$ ,  $p_1$  のみが非零となる場合を調べて、これが負の3項分布と呼ぶべき分布になることを示した。渋谷によれば他にも面白い例がある。

### 3. 特徴と拡張

導出から  $k$  について再生性をもつことが分かる。また導出された分布は任意の正数  $k$  に直接的に拡張できることが多い。負の2項分布と逆2項分布は簡単なリンク関数をもつ指数拡散分布族に属することも分かる。母数の直交性、尤度の分解の面からも都合の良い分布になる。また improper な分布、即ち  $\infty$  の値を正の確率でとる分布、を表現できる。Mover-stayer モデルとは違って確率過程の帰結として improper 分布を説明する。

別の長所の拡張の容易性である。実際に則していると考えられる推移確率を定義すれば良い。このことは分布そのものを考えるより易しいように思われる。